

Corso di aggiornamento

«La matematica dei problemi»

Relatore: prof. Daniele Pasquazi
Dipartimento di Matematica, Università Tor Vergata di Roma

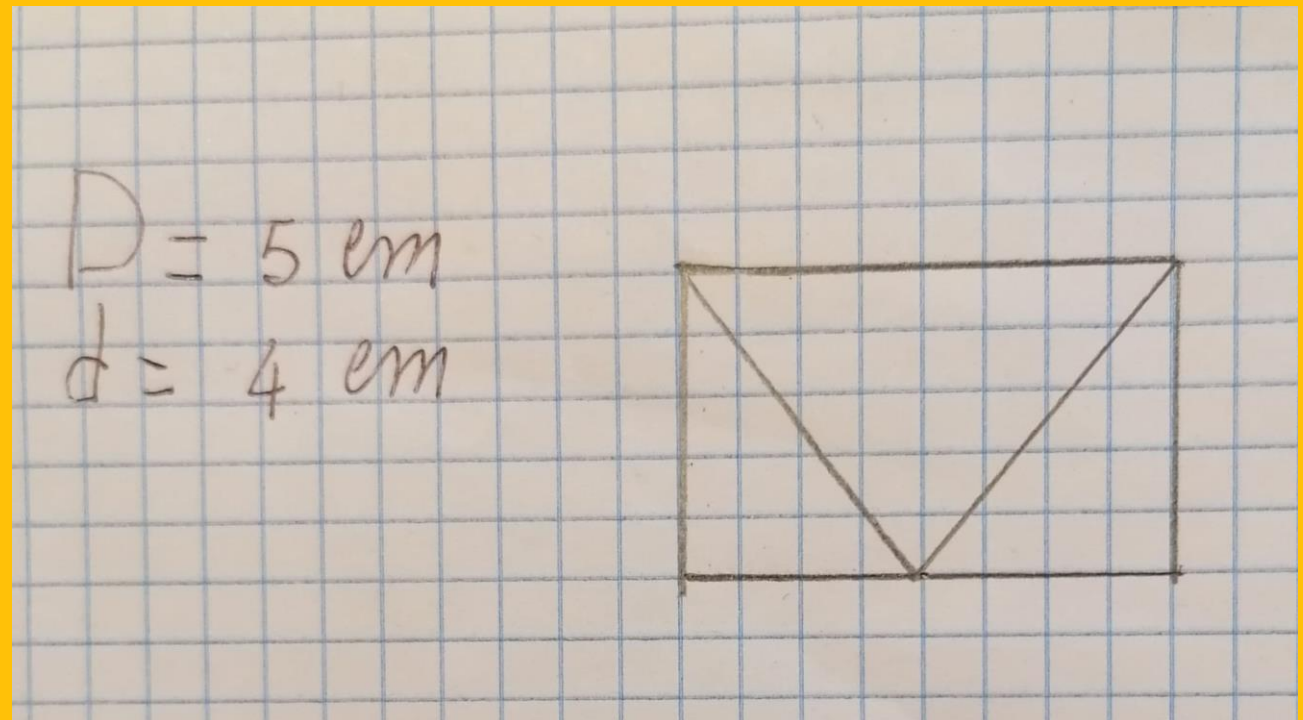
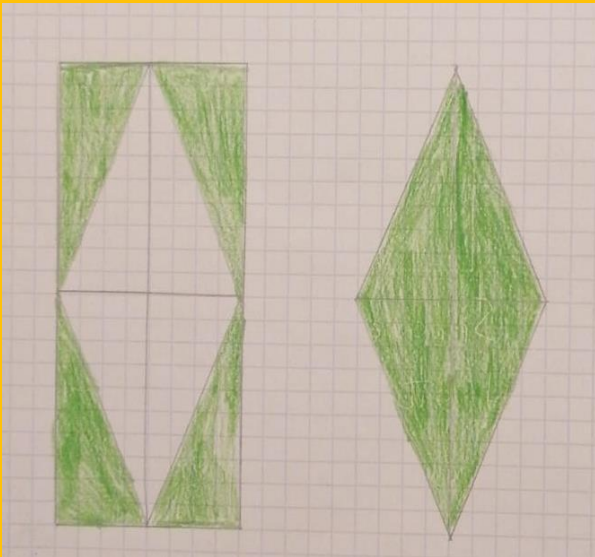
Docente: Duilia Troiani

a.s. 2020 - 2021

**Le proprietà associativa e
commutativa della
moltiplicazione,
applicate al calcolo
dell'area dei poligoni**

Il punto di partenza

«Dimostra la correttezza della seguente formula $D \times d : 2$ »

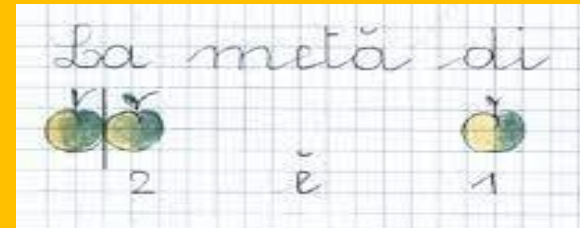


$$Dxd:2 = (D \times d) \times \frac{1}{2} = D \times (d \times \frac{1}{2}) = d \times (D \times \frac{1}{2})$$

**1) È VERO CHE SE INVERTO LE LETTERE,
RIESCO SEMPRE A CALCOLARE L'AREA?**

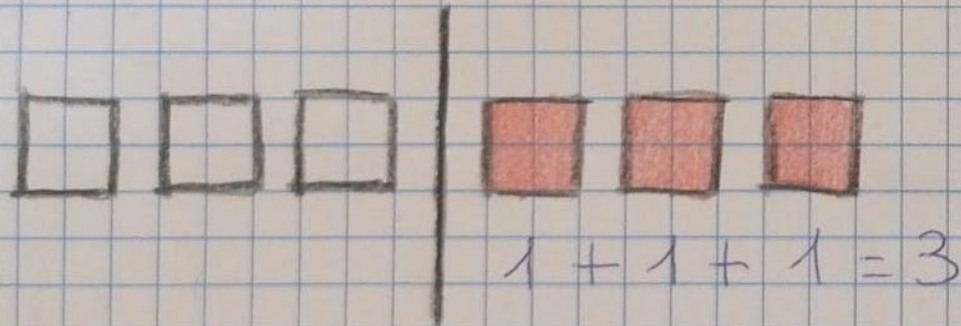
**2) FARE : 2 è LA STESSA COSA DI
FARE $\times \frac{1}{2}$?**

Dal : 2 al X 1/2





TROVO LA METÀ DI UN NUMERO

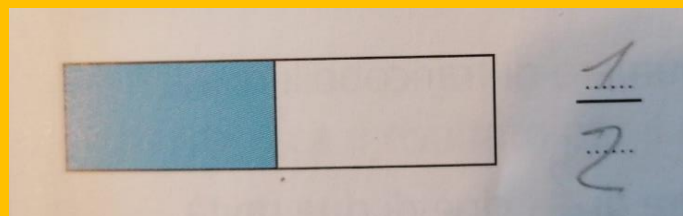
- Trovo 6 unità che divido in 2 gruppi e trovo la metà



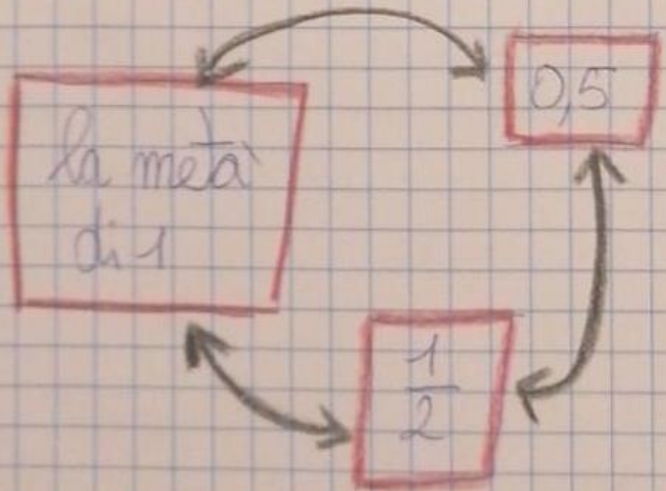
$$6 : 2 = 3$$

$$:2 = \times 1/2$$

Questo  lo posso leggere come 3
unità (1+1+1) oppure come
 6 volte la metà di 1



La metà di 1 = 0,5 = $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$)



```
graph TD; A[la metà di 1] --> B[0,5]; B --> C[1/2]; C --> A;
```

$$:2 = \times 1/2$$

Dall'addizione ripetuta alla moltiplicazione

$1 + 1 + 1 = 3$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 6 \times \frac{1}{2}$
ripeto 6 volte $\frac{1}{2}$

$= 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 6 \times 0,5$
ripeto 6 volte 0,5

$0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 3$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$

$6 \times 0,5 = 3$

$6 \times \frac{1}{2} = 3$

$5 : 2 = 2,5$

$5 \times \frac{1}{2} = 2,5$

$1 + 1 + 0,5 \left(\frac{1}{2}\right) = 2,5$

PROPRIETÀ COMMUTATIVA

Se inverto l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia

$$D=5 \quad d=3 \quad \frac{1}{2}=0,5$$

$$5 \times 3 \times 0,5 = 7,5 \quad 3 \times 5 \times 0,5 = 7,5 \quad 0,5 \times 3 \times 5 = 7,5$$

$$D \times d \times \frac{1}{2}$$

$$d \times D \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times d \times D$$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

Se sostituisco a due fattori, il loro prodotto, il risultato non cambia

$$D=5 \quad d=3 \quad \frac{1}{2}=0,5$$

$$(5 \times 3) \times 0,5 = 7,5 \quad 5 \times (3 \times 0,5) = 7,5 \quad 3 \times (5 \times 0,5) = 7,5$$

$$15 \times 0,5 = 7,5$$

$$5 \times 1,5 = 7,5$$

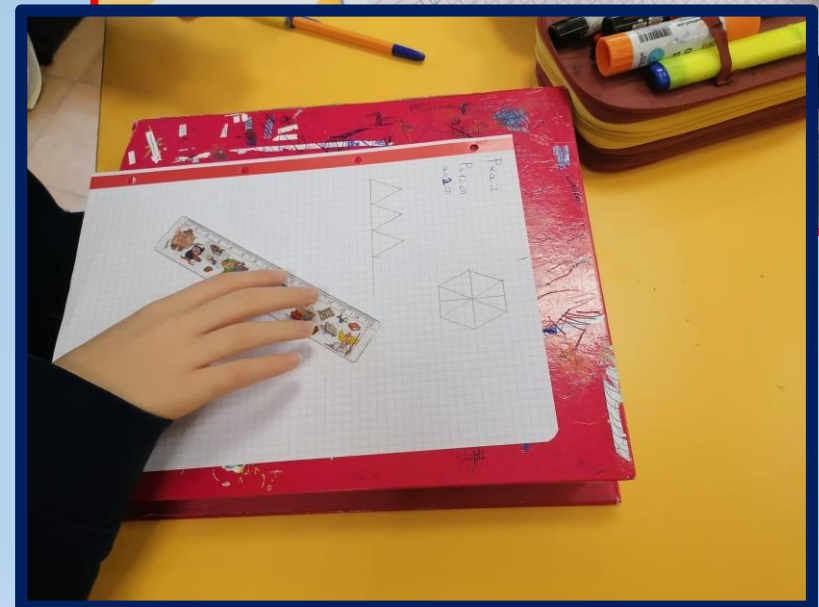
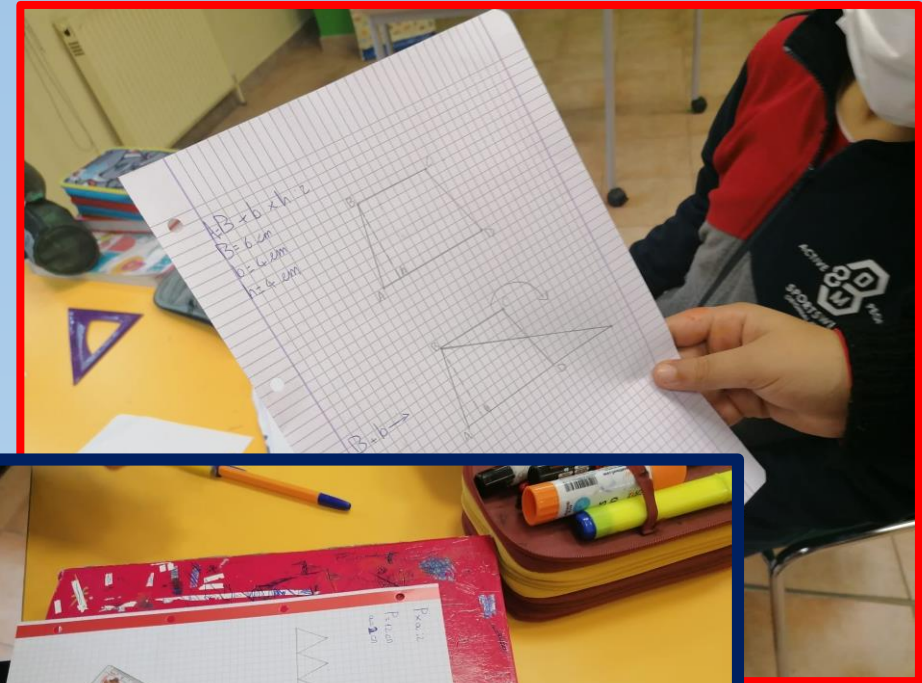
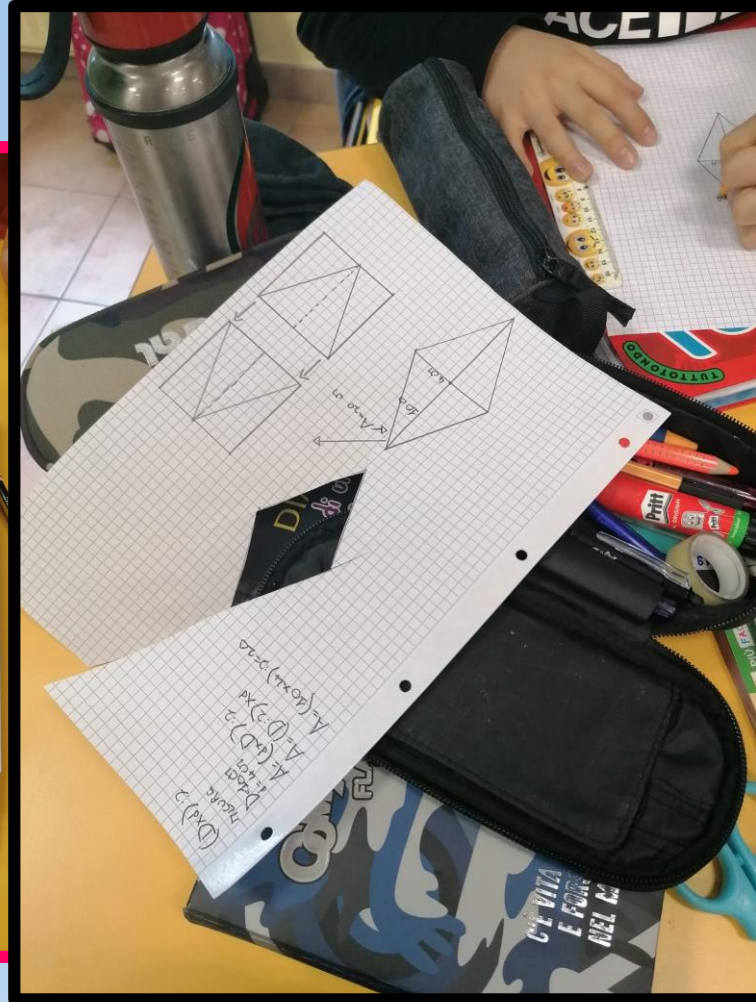
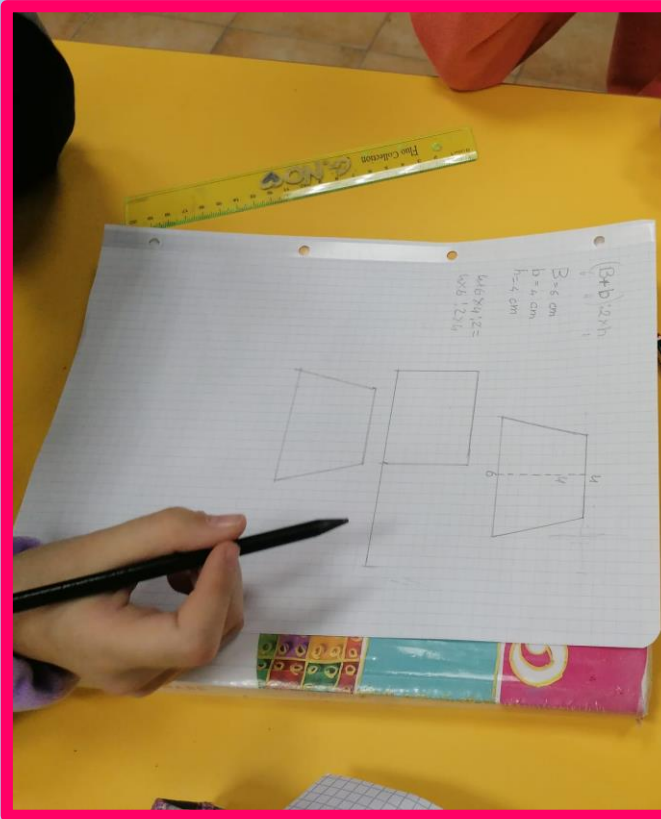
$$3 \times 2,5 = 7,5$$

$$(D \times d) \times \frac{1}{2}$$

$$D \times (d \times \frac{1}{2})$$

$$d \times (D \times \frac{1}{2})$$

$$D \times d : 2 = (D \times d) \times \frac{1}{2} = D \times (d \times \frac{1}{2}) = d \times (D \times \frac{1}{2})$$




Triangoli


$$h \times \frac{1}{2} \times b$$

$B=10$ $h=4$ $1^3=1$ $2^3=8$ $3^3=27$

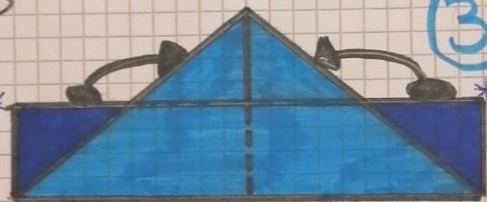
① $B \times h : 2$
 $B \times h \times \frac{1}{2}$



② $h : 2 \times B$
 $h \times \frac{1}{2} \times B$



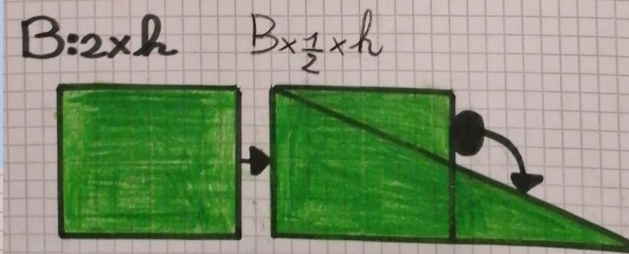
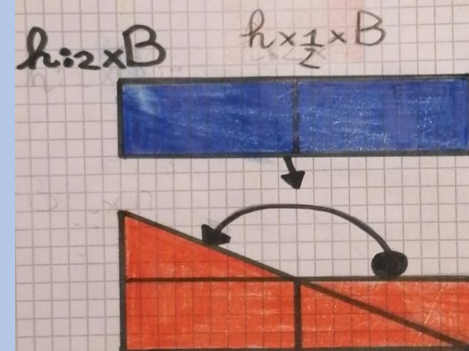
③



Ragionamento

Prima ho preso il rettangolo, abbiamo tracciato l'altezza a metà della figura e l'abbiamo unita ai vertici e i triangolini colorati di blu (*) li ho capovolti e traslati nel triangolo.

TRIANGOLO RETTANGOLO



Ragionamento

Per il triangolo rettangolo ho preso il rettangolo e l'ho diviso a metà, ho preso il vertice di destra e ho tracciato un segmento fino all'altezza tracciata formando 2 triangoli. Il triangolo di sopra lo capovolto e lo traslo come nella figura precedente.

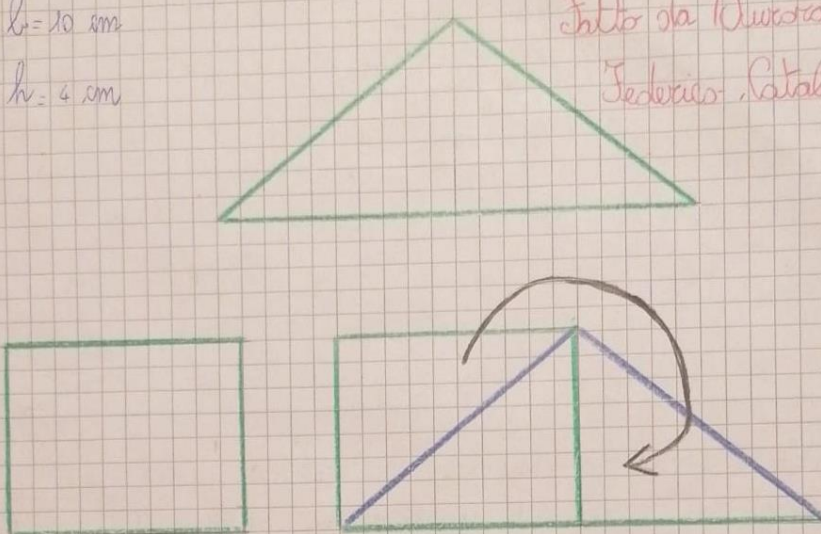
Triangoli

$$b \times \frac{1}{2} \times h$$

$b = 2 \times h$ $b \times \frac{1}{2} \times h$ TRIANGOLO ISOSCELE

$b = 10 \text{ cm}$
 $h = 4 \text{ cm}$

Intero da Quaresa e Federico, Sabelli




IL RETTANGOLO E' EQUIVALENTE AL TRIANGOLO PERCHE' SE TRACCIAMO L'ALTEZZA DEL TRIANGOLO, DIVIDENDO A META' E TRASCINANDO LA META' FACENDO COINCIDERE UN LATO OBLIQUO CON L'ALTRO LATO OBLIQUO, FORMIAMO IL RETTANGOLO DI PARTENZA CHE HA COME DIAGONALE IL LATO OBLIQUO

DI RICCARDO E GIOGI A

FORMULA $b \times h$: $b \times h \times \frac{1}{2}$

TRIANGOLO ISOSCELE

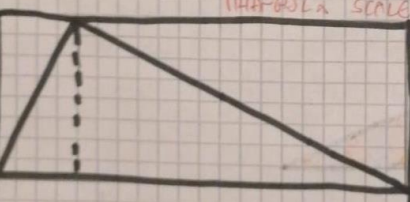


PER INIZIARE BISOCCA FARE $b \times h$ PER OTTENERE UN RETTANGOLO CHE POI FACENDO 2, PER OTTENERE UN ALTRO RETTANGOLO CHE AVRA' L'ALTEZZA EQUIVALENTE A QUELLA DEL TRIANGOLO ISOSCELE.

LA FORMULA FUNZIONA PERCHE' SE ADDIZIONIAMO LA PARTE DEL TRIANGOLO RIMASTO SOTTO E LO SPAZIO DEL RETTANGOLO OTTENIAMO L'AREA DI TUTTO IL TRIANGOLO.

$b \times h \times \frac{1}{2}$

TRIANGOLO SCALENO



PER IL TRIANGOLO SCALENO ABBIAMO UTILIZZATO LA PRIMA PARTE DELLA FORMULA ($b \times h$) PER OTTENERE UN RETTANGOLO CHE AVRA' L'AREA E PERO' DIVIDIAMO

Rombo

VALEATO

FORMULA

$$(D \times d) \div 2$$

MISURE

$$D = 10 \text{ cm}$$

$$d = 4 \text{ cm}$$

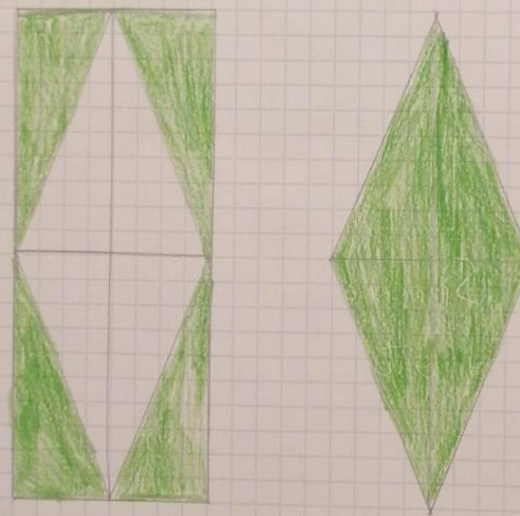


SPIEGAZIONE

Faccendo $D \times d$ ottengo un rettangolo, se all'interno
e disegno un rombo con le stesse
misure (ovvero l'altezza del rettangolo
uguale a la diagonale maggiore del
rombo e la base del rettangolo uguale
alla diagonale minore del rombo),
nota che il rombo è diviso in 4

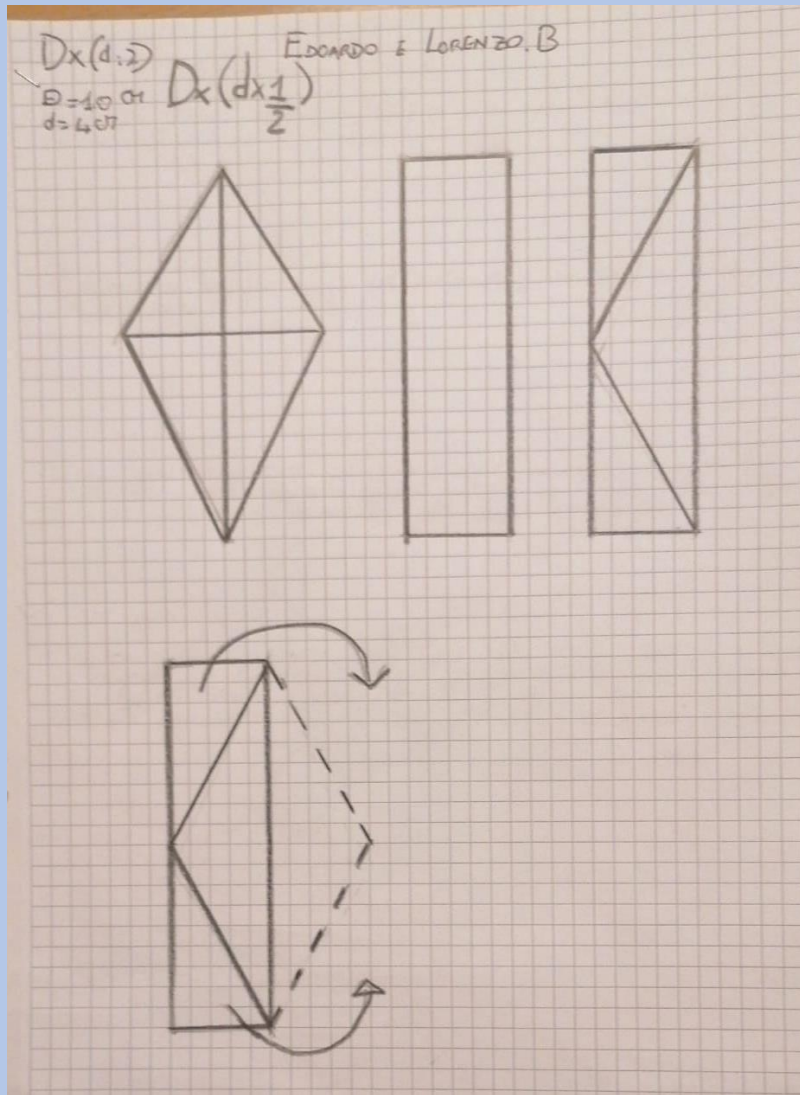
$$(D \times d) \times \frac{1}{2}$$

triangoli rettangoli uguali. Qui 4 triangoli sono
anche presenti all'esterno del rombo ma
all'interno del rettangolo. Se facciamo
attenzione a tutti i dettagli si può capire che il
rombo è la metà del rettangolo. Ed è così che
dividiamo per 2 e la formula è $(D \times d) \div 2$



Rombo

$$D \times (d \times \frac{1}{2})$$



SPAGNOLICHE

PRIMA DI TUTTO ABBIAMO DISEGNATO UN ROMBO TRACCIANDO LE DIAGONALI.

POI ABBIAMO DIVISO IN 2 LA DIAGONALE MINORE E OTTENUTO UN RETTANGOLO.

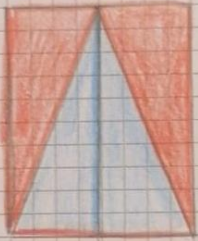
POI ABBIAMO TRACCIATO LA DIAGONALE MINORE E OTTENUTO 2 RETTANGOLI CHE ABBIAMO DIVISO A METÀ CON UNA DIAGONALE. SI SONO FORMATI 2 TRIANGOLI PER OGNI RETTANGOLO.

I 2 TRIANGOLI HANNO COME BASE LA METÀ DELLA DIAGONALE MINORE E LA METÀ DELL'ALTEZZA QUINDI SONO CONGRUENTI. SE RUOTIAMO E TRASLIAMO I 2 TRIANGOLI ESTERNI, FACENDO COINCIDERE LE ALTEZZE, OTTIENIAMO IL ROMBO INIZIALE.

Rombo


$dx(D:2)$ DAFNE - MAURIZIO
→ $dx(D \times \frac{1}{2})$ RAGIONAMENTO

PER PRIMA COSA DOBBIAMO ~~VOI~~ APPLICARE LA FORMULA $dx(D:2)$ CON LE MISURE CHE CI HA DATO LA MAESTRA, ~~DA~~ CHE CI VIENE UN RETTANGOLO. PER RENDERE IL RETTANGOLO EQUIVALENTE AL ROMBO DEVI DIVIDERLO IN DUE ^{RETTANGOLI} TRACCI LE DUE DIAGONALI IN QUESTO ROMBO:




POI FAI LA STESSA COSA MA RIBBALTANDOLO DALL'ALTRO LATO, COSÌ TI VERRÀ IL ROMBO.

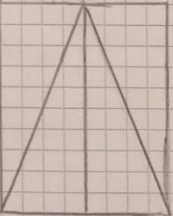
$dx(D:2)$ $dx(D \times \frac{1}{2})$ $d=4\text{ cm}$ $D=10\text{ cm}$



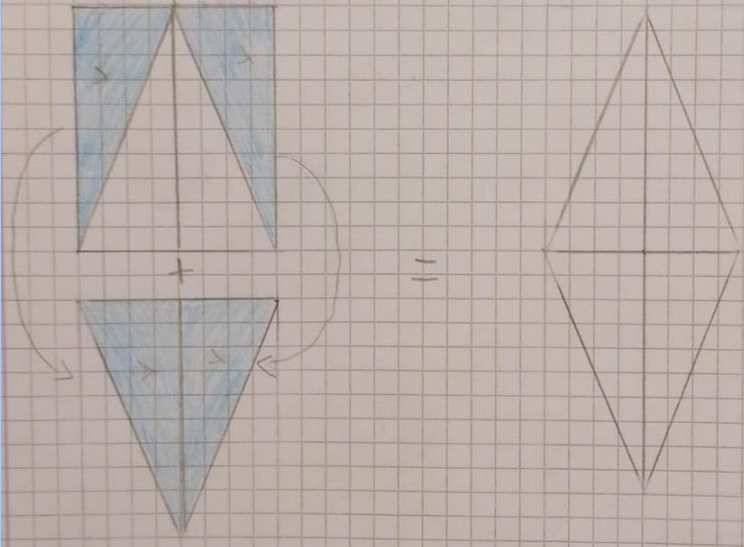
$A=4 \times 10 : 2 = 20\text{ cm}^2$



$\times 2 \rightarrow$
ma il 2°
ribaltato

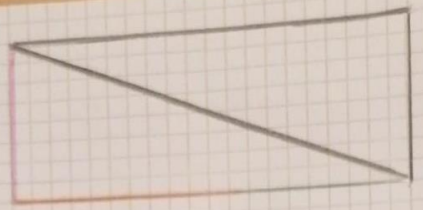


$$d \times (D \times \frac{1}{2})$$

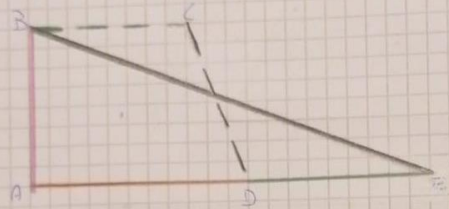


Trapezi

$$(B+b) \times h \times \frac{1}{2}$$



Dopo abbiamo diviso metà il rettangolo formando 2 triangoli rettangoli.



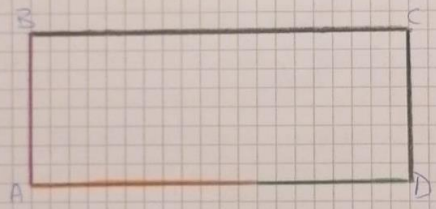
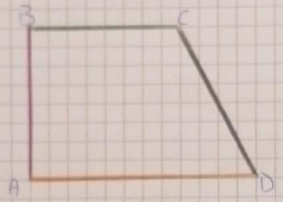
Per andare a riformare il trapezio abbiamo riportato la base minore sopra, facendola partire dal punto "B", e dalla sua fine abbiamo tracciato una linea che andava a finire al punto d'incontro tra le 2 basi, trovando il punto medio del lato obliquo. Abbiamo ottenuto 2 triangoli congruenti.

NICOLE E GIULIA M.

TRAPEZIO RETTANGOLO

$$A = (B+b) \times h \times \frac{1}{2}$$

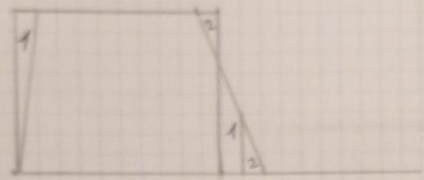
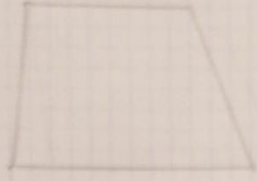
$B = 6 \text{ cm}$
 $b = 4 \text{ cm}$
 $h = 4 \text{ cm}$



Abbiamo iniziato disegnando il trapezio rettangolo, poi abbiamo sommato le due basi e, poi, la loro somma l'abbiamo moltiplicata per l'altezza ottenendo il rettangolo.

$$(B+b) \times \frac{1}{2} \times h$$

TRAPEZIO SCALENO

$$(B+b) \times \frac{1}{2} \times h$$


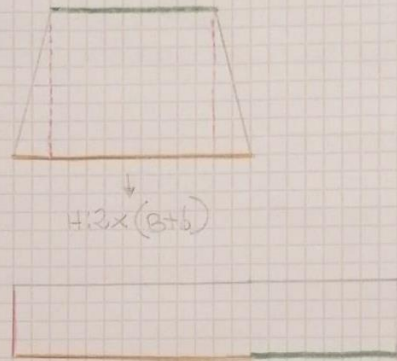
RAGIONAMENTO

Prima di tutto abbiamo disegnato il trapezio scaleno. Dopo abbiamo eseguito la formula e ci è uscito un rettangolo $4 \times 5 \text{ cm}$. Dentro il rettangolo abbiamo disegnato il trapezio scaleno. Dopo averlo disegnato abbiamo notato che c'erano dei triangoli, eravamo e gli abbiamo rimossi con dei numeri: quello a sinistra con il numero 1 e quello a destra con il numero 2 e gli abbiamo spostati al triangolo che stava fuori al rettangolo iniziale.

Trapezi

$$h \times \frac{1}{2} \times (B+b)$$

Trapezio Isoscele VALERIA E MATTEO




$h \times \frac{1}{2} \times (B+b)$

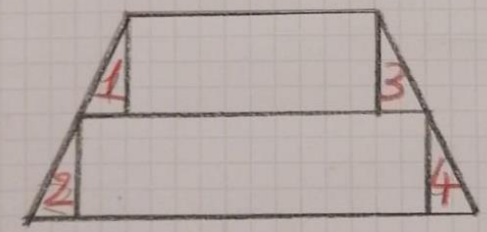
RAGIONAMENTO

IL RETTANGOLO FORMATO SEGUENDO LA FORMULA È EQUIVALENTE AL TRAPEZIO PERCHÉ SE NOI SOVRAPPONIAMO IL RETTANGOLO OTTENUTO CON LA BASE MINORE SOPRA QUELLO OTTENUTO CON LA BASE MAGGIORE AVANZA UN RETTANGOLO LUNGO 1 CM. TENENDO PRESENTE CHE LA DIFFERENZA TRA LE 2 BASI È DI 2 CM, 1 PER LATO AVANZA UN RETTANGOLO LUNGO 1 CM.

Se noi dividiamo il rettangolo a metà tracciamo la diagonale e formiamo 4 triangoli.




LI POSIZIONAMO ALL'ESTREMITÀ DEL RETTANGOLO FORMATO CON LA BASE MAGGIORE E SU ALTRA 2 LI POSIZIONAMO ALL'ESTREMITÀ DEL RETTANGOLO FORMATO CON LA BASE MINORE FACENDO TUTTI QUESTI 4 SPASSAGGI FORMIAMO IL TRAPEZIO



Poligoni regolari

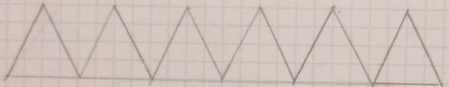
L'ESAGONO DA EMMA E FEDERICA

$P \times a : 2$
 $P \times a \times \frac{1}{2}$

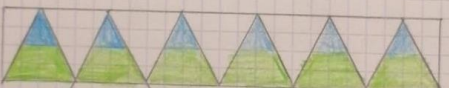


RAGIONAMENTO



PER INIZIARE IL LAVORO ABBIAMO DISEGNATO UN ESAGONO; LO DIVIDIAMO IN SEI TRIANGOLI LA CUI ALTEZZA È L'APOTEMA E ABBIAMO RETTIFICATO IL PERIMETRO



FACENDO $P \times a$ ABBIAMO OTTENUTO UN RETTANGOLO



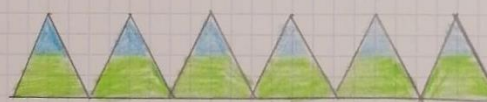
ABBIAMO POI DIVISO $P \times a$ IL RETTANGOLO E OTTENUTO

$$p \times \frac{1}{2} \times a$$


$$p \times a \times \frac{1}{2}$$

ABBIAMO NOTATO CHE I TRIANGOLINI TRA I 2 TRONCHI DI TRIANGOLI HANNO LA STESSA ALTEZZA DEL TRONCO CHE, QUINDI, SE SORMONTATO, RIFORMA IL TRIANGOLO INIZIALE IN CUI ERA STATO DIVISO L'ESAGONO



Come applicare $p \times a$ $p \times \frac{1}{2} \times a$


FABIO & SERGIO





Per applicare la formula $p \times a$ è necessario eseguire questi passaggi:

- dividere il perimetro ovvero fare $12 : 2$
- il risultato di $12 : 2$ lo dobbiamo moltiplicare per l'apotema ovvero per 4

$p : 2$ $12 : 2$



$\times 2$ $\times 4$

Poligoni regolari

$$a \times \frac{1}{2} \times p$$

Formula AREA, PERIMETRO e VOLUME

$a \times \frac{1}{2} \times p$

MISURE
 $P = n \times a$
 $A = \frac{1}{2} \times n \times a$

OPERAZIONI
 $2 \times 2 = 4$
 $1 \times 10 = 10$
 $10 \times 10 = 100$

SPIEGAZIONE

COME PRIMA COSA SIAMO ANDATI A DISEGNARE IL POLIGONO REGOLARE SECONDO LE MISURE DATE (P= n x a) ABBIAMO SELENTO UN SEGNO E DOPO AVER DISEGNATO ABBIAMO **RETTIFICATO** OTTENERDO 6 TRIANGOLI CON LA MISURA.

DOPO AVER RETTIFICATO IL PERIMETRO ABBIAMO SELENTO LA FORMULA CHE DEDUCA $a \times \frac{1}{2} \times p$, QUINDI ABBIAMO DIVISO A META' LA NOTIZIA OTTENERDO.

ALLA FINE ABBIAMO NOTATO CHE I TRIANGOLI CHE SI TROVANO A SINISTRA TRA UN SPUNGO DI UN TRIANGOLO INFARETO NON SONO ALTRI CHE LE PARTI DEI TRIANGOLI CHE ABBIAMO DIVISO A META' (P/2) E COSI' FORMIAMO UNA FIGURA INIZIALE.

Lasciare gli alunni liberi di provare,
di mettersi in gioco, porta a soluzioni
nuove e non pensate e rende la
lezione più stimolante sia per loro che
per me.